

# 3

# M A T R I K S

## Standar Kompetensi

- Merancang dan menggunakan model matematika program linear serta menggunakan sifat dan aturan yang berkaitan dengan barisan, deret, dan matriks dalam pemecahan masalah.

### A. MATRIKS.

Kompetensi Dasar : 2.5. Menggunakan sifat-sifat dan operasi matriks untuk menentukan invers matriks persegi beserta pembuktian rumusnya.

#### Indikator

- o Menjelaskan ciri suatu matriks,
- o Menuliskan suatu informasi dalam bentuk matriks,
- o Melakukan operasi aljabar atas dua matriks,
- o Menentukan determinan matriks persegi ordo 2 dan kaitannya dengan matriks mempunyai invers,
- o Menentukan invers matriks persegi ordo 2,
- o Membuktikan rumus invers matriks ordo 2,
- o Menjelaskan sifat-sifat operasi matriks.

Pengalaman Belajar : 2.5.1. Menyatakan masalah nyata yang dapat memunculkan sekelompok simbol yang disebut matriks.  
 2.5.2. Mengkomunikasikan pengertian ordo dan algoritma matriks.  
 2.5.3. Menggunakan algoritma penjumlahan matriks.

Sebelum mempelajari serta mengenal, memahami dan menyelesaikan beberapa permasalahan matematika yang menyangkut Matriks beserta Invers Matriks tentu diharapkan peserta didik secara mandiri dan atau kelompok diskusi menggali informasi dan pengalaman belajar terdahulu serta pengembangannya dari beberapa sumber referensi maupun media interaktif.

Diskusikan dengan kelompok belajar anda, guna memahami beberapa hal berikut ini:

#### Pengantar materi:

Dalam kehidupan sehari-hari sebenarnya sering kita jumpai penyajian informasi atau data yang tersaji dalam bentuk susunan baris-baris dan kolom-kolom. Misal daftar siswa Kelas XII IPS SMA Mojokerto sebagaimana di samping:

Jenis Kelamin	Putra	Putri	Jumlah
Kelas			
XII IPS-1	28	15	43
XII IPS-2	32	10	42
<b>Jumlah</b>	60	25	85

Secara matematis jika kepala baris dan kolom dihilangkan didapat himpunan (susunan) elemen/bilangan yang tersusun menurut baris-baris dan kolom-kolom yang berbentuk persegi panjang, hal ini memenuhi kaidah *Matriks*.

Jadi, *Matriks* merupakan susunan sekumpulan bilangan/elemen yang berbentuk persegi panjang dan diatur menurut baris-baris dan kolom-kolom serta dibatasi oleh tanda kurung ), dan biasa diberi nama dengan lambang HURUF KAPITAL.

Setiap bilangan yang ada pada matriks disebut dengan *elemen (unsur) matriks*, dimana posisi atau letaknya mengikuti pola baris dan kolom di mana ia berada.

Sehingga informasi data di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks, sbb:

$$A = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 43 \\ 32 & 10 & 42 \\ 60 & 25 & 85 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 43 \\ 32 & 10 & 42 \\ 60 & 25 & 85 \end{bmatrix}$$

Diskusikan dengan kelompok belajar anda melalui pemberdayaan referensi yang ada !

**A.1. BENTUK UMUM MATRIKS.**

Bentuk umum suatu matriks yang banyaknya baris **m** dan banyaknya kolom **n** adalah :

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & a_{kn} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Perhatikan beberapa hal berikut:

Matriks  $A_{m \times n}$  mempunyai ukuran/ **ordo** **m x n**. Ordo Matriks ditentukan oleh banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n) pada matriks tersebut. Elemen/unsur matriks dilambangkan huruf kecil dengan indeks baris dan kolom tempatnya berada:  
 $a_{11}$  : elemen matriks A pada baris 1 kolom 1.  
 $a_{21}$  : elemen matriks A pada baris ..... kolom .....  
 $a_{3n}$  : elemen matriks A pada baris ..... kolom .....

**Masalah 1:**

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & a & 1 \\ -2 & 7 & 5 & 2 \\ 9 & -8 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Dari matriks disamping tentukan:

- a. Ordo matriks.
- b. Elemen matriks yang terletak pada baris 3 kolom ke empat ( $b_{34}$ )
- c.  $b_{24}$  ,  $b_{43}$  dan  $b_{54}$

**Penyelesaian :**

- a. Jumlah baris matriks B adalah 5 dan jumlah kolom matriks B adalah ..... ,  
Jadi ordo matriks B adalah ..... x .....
- b. Elemen baris ke-3 kolom ke-4  $\rightarrow b_{34} = 2$
- c. Elemen matriks B  $\rightarrow b_{24} = \dots$  ,  $b_{43} = \dots$  dan  $b_{54} = \dots$

**A.2. JENIS-JENIS MATRIKS.**

Sering kali matriks diberi nama dan dibedakan jenisnya menurut aturan ordonya (banyaknya baris dan kolom) dan juga berdasar ciri-ciri tertentu yang dimilikinya, sebagai berikut:

a. *Matriks Baris:*

Matriks yang hanya terdiri dari satu baris (ordo  $1 \times m$ )  $\rightarrow A = (2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)$

b. *Matriks Kolom :*

Matriks yang hanya terdiri dari satu kolom (ordo  $m \times 1$ )  $\rightarrow K = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ b \\ 9 \end{bmatrix}$

c. *Matriks Nol :*

Suatu matriks ordo  $m \times n$  dimana setiap unurnya adalah 0 (nol)  $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. *Matriks Bujur sangkar (Persegi) :*

Suatu matriks yang banyaknya baris dan banyaknya kolom adalah sama.  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

e. *Matriks Segitiga :*

Matriks persegi di mana elemen-elemen atau unsur-unsur yang terletak *di atas atau di bawah* Diagonal utama semuanya 0.  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$   $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- f. Matriks Diagonal :  
Matriks bujur sangkar di mana semua unsurnya kecuali unsur-unsur pada diagonal utama adalah nol.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- g. Matriks Skalar :  
Matriks diagonal yang semua unsur-unsurnya sama atau sejenis.

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- h. Matriks Identitas(Satuan) :  
Matriks diagonal yang semua unsurnya adalah 1 (Matriks Skalar dengan elemen 1)

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- i. Matriks Simetris :  
Matriks bujur sangkar yang unsur pada baris ke -i kolom ke -j sama dengan unsur pada baris ke -j kolom ke -i sehingga  $a_{ij} = a_{ji}$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

- j. Matriks Mendatar :  
Matriks yang banyaknya baris kurang dari banyaknya kolom.

$$Q_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{bmatrix}$$

- k. Matriks Tegak :  
Matriks yang banyaknya baris lebih dari banyaknya kolom.

$$R_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & b \\ a & -1 \\ 5 & c \end{bmatrix}$$

**TRANSPOSE SUATU MATRIKS.**

Transpose suatu matriks  $A_{m \times n}$  adalah suatu matriks lain yang berordo  $n \times m$  dimana elemen-elemen matriksnya tidak ada yang berubah nilai akan tetapi hanya berubah letak/posisinya. Transpose dari matriks A biasa dilambangkan dengan  $A'$  atau  $A^T$

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{maka Transpose dari A} \rightarrow \quad A^T_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 5 \\ 1 & 4 & \dots \end{bmatrix}$$

**KESAMAAN DUA MATRIKS.**

Dua buah matriks A dan B dikatakan sama ( $A = B$ ) jika memenuhi syarat:

- a. Ordo ke dua matriks sama.                      b. Elemen-elemen matriks yang seletak (baris-kolom) sama.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \frac{3}{6} \\ 0 & \sqrt{1} & \sqrt{9} \end{bmatrix} \quad \text{maka dapat disimpulkan}$$

bahwa diantara matriks ini :  $A = C$  dan  $A \neq B$  serta  $B \neq C$

**Masalah 2 :**

Diketahui matriks :  $A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$  ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  dan  $A = B^T$  maka nilai  $3x + 4y = \dots$

**Penyelesaian :**

$$A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B^T = \begin{bmatrix} 3 & \dots \\ x+\dots & 2 \end{bmatrix}$$

Karena  $A = B^T$  maka  $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \dots \\ x+\dots & 2 \end{bmatrix}$  didapat :

$$x = 3 \text{ dan } x + \dots = 8 \iff \dots + y = \dots \rightarrow y = \dots$$

sehingga didapat nilai :  $3x + 4y = 3(\dots) + 4(\dots) = \dots + \dots = \dots$

**LAWAN SUATU MATRIKS.**

Matriks B disebut lawan (negatif) dari matriks A jika setiap unsur/elemen matriks B merupakan lawan (negatif) dari unsur/elemen matriks A yang seletak.

Matriks lawan dari A dinyatakan sebagai  $-A$  , dan berlaku  $A + (-A) = O$

Missal:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix} , \text{ maka lawannya } -B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -9 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

**A.3. OPERASI ALJABAR PADA MATRIKS.**

Operasi aljabar yang dimaksud di sini adalah bentuk operasi hitung sederhana yang dapat diberlakukan pada dua atau lebih matriks dan operasi ini mengikuti kaidah yang berlaku secara umum.

Diskusikan dengan kelompok belajar anda dengan mendaya gunakan beberapa sumber belajar atau referensi yang ada baik di perpustakaan ataupun yang lainnya !

**A.3.1. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN PADA MATRIKS.**

Dua buah atau lebih matriks dapat dilakukan operasi penjumlahan dan atau pengurangan, jika memenuhi syarat, yaitu:

- a. Ordo ke dua matriks harus sama.
- b. Elemen-elemen matriks yang seletak (baris-kolom-nya) saja yang dilakukan operasi penjumlahan dan atau pengurangan.

Operasi *pengurangan* pada matriks pada hakekatnya juga merupakan operasi *penjumlahan dengan lawan matriksnya*, sehingga:  $A - B = A + (-B)$

**Masalah 3 :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan : a.  $A + B$                       b.  $B + C$                       c.  $(A + B) - C$

**Penyelesaian :**

$$\begin{aligned} \text{a. } A + B &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\dots & -2+\dots & \dots-\dots \\ \dots-1 & 3+\dots & -1+\dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & -2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b. \quad B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots+0 & 0+\dots & \dots+\dots \\ -1+\dots & \dots-\dots & 3+\dots \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$c. \quad (A + B) - C = \begin{pmatrix} \dots & -2 & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots-0 & -2-\dots & \dots-\dots \\ 0-\dots & \dots-\dots & \dots-2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

**Sifat-sifat operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks:**

- Komutatif :  $A + B = B + A$
- Assosiatif :  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Terdapat sebuah matriks identitas :  $A + O = O + A = A$
- Setiap matriks A mempunyai lawan atau negatif matriks ( $-A$ ), di mana :  $A + (-A) = O$

**Permasalahan untuk didiskusikan siswa:**

- Tentukan nilai dari variabel-variabel berikut ini !

$$a. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5p+q & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & q=2 \end{pmatrix}$$

$$b. \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 5 & 4 & b \\ 8 & 3c & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2a \\ 8 & 4b & 10 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan hasil dari operasi aljabar matriks berikut ini:

- $A + B$
- $A + C$
- $B + C$
- $C - A$
- $(A + C) - (A + B)$
- $(A - B) + (C - A)$

- Jika X adalah matriks ordo 2 atau ( $2 \times 2$ ), selesaikan persamaan berikut:

$$a. \quad X + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c. \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$b. \quad X - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$d. \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \text{Diketahui: } A = \begin{pmatrix} a+b & 1 & 2 \\ 4 & c & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & c \\ 0 & b & 5 \\ a & 4 & 10 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 6 \\ 14 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Jika  $A + B = C$ , Tentukan nilai dari a, b dan c !

$$5. \quad \text{Diketahui: } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks X, jika  $A + X = B^T$  !

$$6. \quad \begin{pmatrix} -x & y \\ -z & -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y+x & -y+x \\ -z+x & 6x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}, \text{ Tentukan nilai } x + y + z !$$

**A.3.2. PERKALIAN PADA MATRIKS.**

Operasi perkalian pada suatu matriks pada dasarnya dapat dikelompokkan menjadi dua (2) dengan karakteristik yang berbeda, yaitu:

**a. Perkalian Bilangan Real (Skalar) dengan Matriks.**

Jika  $k$  adalah bilangan Real dan  $A$  sebuah matriks, maka  $k \cdot A$  adalah sebuah matriks baru yang diperoleh dari hasil perkalian  $k$  dengan setiap elemen/unsur matriks  $A$ .

$$\text{Jika : } A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}, \text{ maka } k \cdot A = \begin{bmatrix} k.a & k.b & k.c & k.d \\ k.e & k.f & k.g & k.h \\ k.i & k.j & k.k & k.l \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Perkalian Bilangan Real (Skalar) dengan Matriks:

- 1.  $(k \pm m) A = k.A \pm m.A$
- 2.  $k(A \pm B) = k.A \pm k.B$
- 3.  $k(m.A) = (k.m) A$
- 4.  $1 \cdot A = A$
- 5.  $(-1) A = -A$
- 6.  $0 \cdot A = O$

**Masalah 4 :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukan : a.  $2A + \frac{1}{2} B$                       b.  $5 \cdot (B + C)$                       c.  $4 A - 3 C$

**Penyelesaian :**

$$\begin{aligned} \text{a. } 2A + \frac{1}{2} B &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & \dots & \dots \\ \dots & 6 & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

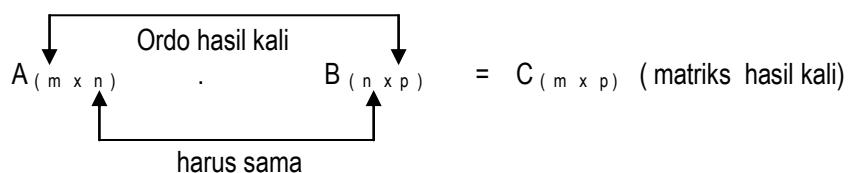
$$\begin{aligned} \text{b. } 5 \cdot (B + C) &= 5 \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } 4 A - 3 C &= 4 \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & \dots & \dots \\ \dots & 12 & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 3 & \dots & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -14 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**b. Perkalian Dua Matriks.**

Dua buah matriks dapat dikalikan jika “ **banyaknya kolom pada matriks sebelah kiri sama dengan banyaknya baris matriks sebelah kanan** “

Perkalian matriks  $A_{m \times n}$  dengan matriks  $B_{n \times p}$  didefinisikan sebagai berikut:



Aturan perkalian : Mengalikan unsur-unsur baris matriks A dengan unsur-unsur kolom matriks B, kemudian menjumlahkan hasil perkalian antar elemen tersebut.

Perhatikan aturan perkalian dua matriks di bawah ini:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \text{ dan } B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ maka matriks : } C = A \times B \text{ dapat diturunkan:}$$

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.1 + b.2 + c.3 \\ d.1 + e.2 + f.3 \end{bmatrix} = C_{2 \times 1}$$

**Masalah 5:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \text{ Tentukan } A \times B \text{ dan } B \times A$$

**Penyelesaian :**

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ (4 \ 5 \ 6) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (4 \ 5 \ 6) \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1(-2) + (\dots).1 + 3.(\dots) & 1.(\dots) + 2.(-4) + (\dots)(\dots) \\ 4(-2) + (\dots).1 + (\dots).(\dots) & (\dots).3 + (\dots)(\dots) + 6.6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ -3 & \dots \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2).1 + 3.(\dots) & (-2).(\dots) + 3.5 & (\dots)(\dots) + 3.(\dots) \\ 1.(\dots) + (-4)(\dots) & (\dots).2 + (-4)(\dots) & (\dots).3 + (\dots)(\dots) \\ (\dots)(\dots) + (\dots).4 & 0.(\dots) + (\dots).5 & (\dots)(\dots) + 6.(\dots) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & 30 & \dots \end{pmatrix}$$

Dari sini nampak jelas bahwa dalam operasi perkalian dua matriks tidak berlaku sifat komutatif ( $A \cdot B \neq B \cdot A$ ).

**Sifat-sifat perkalian dua matriks:**

- a. Tidak komutatif  $\rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$
- b. Bersifat assosiatif  $\rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- c. Berlaku distributif dari kiri  $\rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$   
dari kanan  $\rightarrow (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- d. Jika  $A \cdot B = A \cdot C$ , pada umumnya  $B \neq C$
- e. Jika  $A^T$  dan  $B^T$  adalah transpose dari matriks A dan B, maka  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

**Masalah 6 :**

Seorang ahli gizi pada suatu perusahaan roti akan mencampur dua macam tepung yang berlainan (misal tepung jenis M dan N). Sejumlah protein, karbohidrat, dan lemak (dinyatakan dalam gram untuk setiap ons) yang terkandung dalam setiap jenis tepung ditentukan oleh matriks X. Setiap jenis tepung yang digunakan dalam tiga macam campuran ditentukan oleh matriks Y.

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Jenis M} & \text{Jenis N} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cc} 15gr/ons & 10gr/ons \\ 70gr/ons & 60gr/ons \\ 10gr/ons & 5gr/ons \end{array} \right] & \begin{matrix} \leftarrow \text{protein} \\ \leftarrow \text{karbohidrat} \\ \leftarrow \text{lemak} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left[ \begin{array}{ccc} 4ons & 3ons & 2ons \\ 2ons & 4ons & 5ons \end{array} \right] & \begin{matrix} \leftarrow \text{Jenis M} \\ \leftarrow \text{Jenis N} \end{matrix} \end{matrix}$$

- Carilah banyaknya protein dalam campuran A.
- Carilah banyaknya lemak dalam campuran C.

**Penyelesaian :**

- Banyaknya protein dalam campuran A adalah:

$$(15 \ 10) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 15.(...) + (...).2 = \dots + \dots = 80 \text{ gram.}$$

- Banyaknya lemak dalam campuran C adalah:

$$(10 \ 5) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 10.(...) + (...).5 = \dots + \dots = 45 \text{ gram.}$$

**Permasalahan untuk didiskusikan siswa:**

- Jika diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ , maka tentukan:

- $A \cdot B$
- $3A \cdot B$
- $B^T \cdot A$

- Jika  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , maka tentukan matriks :

- $A^2$
- $A^3$
- $2(A^2 - A)$

- Diketahui matriks :  $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  dan  $R = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukanlah :

- $B + C$
- $A \cdot B$
- $A \cdot C$
- $A \cdot B + A \cdot C$
- $A \cdot (B + C)$
- $(A + B) \cdot C$

- Jika X matriks ordo 2, maka selesaikan bentuk persamaan di bawah ini:

$$\text{a. } 4X - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{b. } 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 3X = 4 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

- Diketahui matriks  $P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , Jika  $\theta = 60^\circ$  maka tentukan matriks :

- $2P$
- $P^2$
- $P^3 - 3P$

**A.4. DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS.**

**A.4.1. DETERMINAN MATRIKS.**

**a. Determinan matriks ordo 2.**

Pada matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , yang dimaksud determinan matriks A dan biasa ditulis  $|A|$

atau  $\det. A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

**Masalah 6 :**

Tentukan determinan matriks  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian :**

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  maka  $\det. B = a \cdot d - b \cdot c = 2 \cdot (5) - 1 \cdot (-3) = 10 - (-3) = 10 + 3 = 13$

$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  maka  $\det. C = a \cdot d - b \cdot c = 6 \cdot (2) - (3) \cdot (4) = 12 - 12 = 0$

**b. Determinan matriks ordo 3.**

**Pengantar teori:**

Determinan matriks bujur sangkar ordo  $n > 2$ , dapat digunakan 2 cara sebagai berikut:

1. Menggunakan matriks minor dan kofaktornya, sbb:

Misal diketahui matriks bujur sangkar ordo 3 :  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Dengan mengambil unsur  $a_{21}$ , kita hapuskan setiap unsur/elemen pada baris ke-2 dan kolom ke-1, sehingga menjadi :

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  sehingga diperoleh matriks bujur sangkar:  $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

determinan matriks ini disebut minor  $a_{21}$ , sehingga dengan cara yang sama dapat ditentukan :

Minor  $a_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  dan Minor  $a_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Kemudian pada setiap unsur  $a_{ij}$  dikaitkan bilangan  $(-1)^{i+j}$ , dimana  $i + j$  adalah jumlah baris dan kolom letak unsur yang dipakai, sehingga:

$a_{21}$  terkait dengan bilangan  $(-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$

$a_{11}$  terkait dengan bilangan  $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = \dots$

$a_{12}$  terkait dengan bilangan  $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = \dots$ , begitu seterusnya.

Dan selanjutnya hasil kali bilangan  $(-1)^{i+j}$  dengan minor  $a_{ij}$  disebut kofaktor  $A_{ij}$  dan dinyatakan dalam  $A_{ij}$  sehingga dapat diturunkan :

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1 [a_{12} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{32}]$

dengan aturan yang sama dapat diturunkan kofaktor lainnya, dst

Jika konsep ini digunakan sebagai bantuan mencari determinan matriks maka Det. A dapat ditentukan dengan aturan : Tetapkan baris (kolom) acuan kemudian setiap unsur dalam baris (kolom) dikalikan dengan kofaktornya. Jumlah semua hasil perkaliannya itulah DETERMINAN.

**Masalah 7 :**

Tentukan determinan matriks  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian :**

Dengan mengembangkan baris ke -satu dapat diturunkan Det. B sebagai berikut:

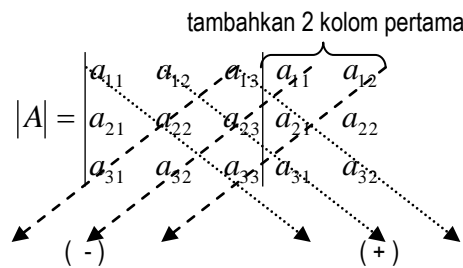
$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -10 & 1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(\dots)1 + 2(\dots)(\dots) + (\dots)(\dots)(\dots) = \dots + \dots - 2 = 17$$

2. Menggunakan perkalian diagonal matriks ( Aturan Sarrus) sbb:

Misal diketahui matriks bujur sangkar ordo 3 :  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Determinan matriks A atau Det. A atau  $|A|$  dapat ditentukan dengan aturan:



$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

**Masalah 8 :**

Tentukan determinan matriks  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -10 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian :**

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -10 & 1 & -1 & -10 & 1 \\ 12 & -1 & 2 & 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 2(\dots)12 + 1(\dots)(\dots) - 1(\dots)12 - 3(\dots)(\dots) - (\dots)(-10)(\dots)$$

$$= 6 - \dots + 10 - \dots - \dots + \dots = 17.$$

Diskusikan dengan kelompok belajar anda melalui pendaya gunaan referensi dan studi pustaka yang ada, agar anda semakin memahami tentang determinan !

**A.4.2. INVERS MATRIKS.**

Jika A dan B masing-masing adalah matriks persegi ordo n sehingga berlaku  $A \cdot B = B \cdot A = I$ , maka matriks A dan B saling invers (Matriks B invers dari A ditulis  $A^{-1}$  atau Matriks A invers dari B ditulis  $B^{-1}$ ).

Sehingga dapat dipertegas bahwa :  $A \cdot A^{-1} = I$  ( I matriks identitas )

Suatu matriks persegi (bujur sangkar) A disebut:

1. **Singular** jika  $\text{Det. } A = |A| = 0$ , sehingga matriks tidak mempunyai invers.
2. **Non singular** jika  $\text{Det. } A = |A| \neq 0$ , sehingga matriks mempunyai invers.

**a. Invers matriks ordo 2.**

Sudah dijelaskan bahwa hubungan sebuah matriks dengan inversnya memenuhi:  $A \cdot A^{-1} = I$

Misal:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  dapat ditentukan:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = I \text{ sehingga } \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

diperoleh :  $ap + br = 1$  .....i)                       $aq + bs = 0$  .....iii)  
 $cp + dr = 0$  .....ii)                               $cq + ds = 1$  .....iv)

dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas didapat :

$$cp + dr = 0$$

$$dr = -cp \rightarrow r = \frac{-cp}{d} \text{ disubstitusikan pada: } ap + br = 1$$

$$ap + b \left( \frac{-cp}{d} \right) = \dots$$

$$ap (\dots) - (\dots) cp = d$$

$$\dots [ad - (\dots)(\dots)] = \dots$$

$$p = \frac{\dots}{ad - bc}$$

melalui langkah yang sama akan didapat hubungan:

$$r = \frac{-c}{ad - bc}, \quad q = \frac{-b}{ad - bc} \text{ dan } s = \frac{a}{ad - bc}, \text{ Sehingga invers matriks A :}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{det.}A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

**Masalah 9 :**

Tentukan Invers matriks  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$  dan  $C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian :**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ maka } B^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 1(-3)} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \text{ maka } C^{-1} = \frac{1}{6(\dots) - (\dots)5} \begin{pmatrix} 2 & -\dots \\ -5 & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{\dots} \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\dots} & \frac{-3}{\dots} \\ \frac{\dots}{\dots} & \frac{\dots}{\dots} \end{pmatrix}$$

**b. Invers matriks ordo  $n > 2$ .**

Invers matriks ordo  $n > 2$  dapat ditentukan dengan menggunakan Adjoin Matriks.

Sehingga :  $A^{-1} = \frac{Adj.A}{|A|}$  , dimana Adjoin A merupakan matriks tranpose dari kofaktor A.

$$\text{atau: } A^{-1} = \frac{1}{Det.A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

**Masalah 10 :**

Tentukan Invers matriks  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

**Penyelesaian :**

$$Det. A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 - 8) - 2(-8 + \dots) + 3(\dots - 18) = \dots + 4 - \dots = 2$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 12 - 8 = \dots & A_{21} = -(-4 - \dots) = \dots & A_{31} = 4 + \dots = \dots \\ A_{12} = -(-8 + \dots) = \dots & A_{22} = (-2 + \dots) = \dots & A_{32} = -(2 - \dots) = \dots \\ A_{13} = 16 - \dots = \dots & A_{23} = -(\dots + 6) = \dots & A_{33} = -6 - \dots = \dots \end{array}$$

$$\text{Sehingga : } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & \dots & 22 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & -10 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & 11 \\ 1 & \dots & \dots \\ \dots & -5 & \dots \end{pmatrix}$$

**Permasalahan untuk didiskusikan siswa:**

01. Tentukan determinan matriks-matriks di bawah ini:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & \text{c. } \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & \text{e. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{b. } \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} & \text{d. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{f. } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

02. Tentukan invers matriks-matriks di bawah ini:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{b. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & \text{c. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{d. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

03. Diketahui  $P = \begin{bmatrix} x+1 & x-2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ , Jika  $\det. P = 7$ , tentukan nilai  $x$  !

04. Jika  $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ , maka nilai  $x$  yang memenuhi adalah .....

## TAGIHAN KOMPETENSI DASAR 2.5

### A. Pilih salah satu jawaban yang paling tepat !

01. Jika  $\begin{bmatrix} x & 4 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+y \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ , nilai  $x$  dan  $y$  dalam kesamaan itu adalah .....
- a. 2 dan -2      b. -2 dan -3      c. -2 dan 2      d. 2 dan 2      e. 3 dan -2
02. Diketahui :  $A = \begin{bmatrix} 4y & 0 \\ -6 & -2x \\ -1 & 6x \end{bmatrix}$  dan  $B = \begin{bmatrix} 2x & -6 & -1 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix}$  jika  $A = B^T$  maka nilai  $x$  dan  $y$  berturut-turut adalah .....
- a. 3 dan  $\frac{2}{3}$       b. 3 dan  $\frac{-3}{2}$       c. 3 dan  $\frac{4}{3}$       d. 3 dan  $\frac{3}{2}$       e. -3 dan  $-\frac{2}{3}$
03. Diketahui :  $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , nilai  $a + b + c = \dots\dots$
- a. 13      b. 12      c. 11      d. 10      e. 9
04. Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  maka  $A^2 + 2B = \dots\dots$
- a.  $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$       c.  $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$       d.  $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$       e.  $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$
05. Bila diketahui :  $\begin{pmatrix} 4 & a-2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -11 & -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  maka Nilai  $a = \dots\dots$
- a. 25      b. 14      c. 13      d. 10      e. 0
06. Jika matriks  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ , maka nilai  $c = \dots\dots$
- a. 2      b. 3      c. 4      d. 5      e. 7
07. Jika matriks  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$ , maka  $X = \dots\dots$
- a.  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$       c.  $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$       d.  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$       e.  $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
08. Diketahui matriks  $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  dan jika  $A^T = B^{-1}$  maka matriks  $A$  adalah .....
- a.  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$       b.  $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$       c.  $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$       d.  $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$       e.  $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
09. Diketahui  $A = \begin{bmatrix} -3 & x \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$  tidak mempunyai invers untuk nilai  $x = \dots\dots$
- a. -27      b. -9      c. 3      d. 9      e. 27
10. Jika  $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  maka  $A^T + A^{-1}$  adalah .....
- a.  $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$       c.  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$       d.  $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$       e.  $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

**B. Kerjakan dengan langkah yang benar!**

1. Diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ , Tentukan :

- a.  $B(A + C)$                       c.  $A(B^T - C)$                       e.  $(A + B + C)^{-1}$   
 b.  $C^T(2A + B)$                       d.  $(A \cdot B \cdot C)^{-1}$                       f.  $A \cdot (B + C)^{-1}$

2. Tentukan matriks  $X$  yang memenuhi hubungan di bawah ini:

a.  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 17 & 19 \end{bmatrix}$                       b.  $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 7 & -18 \end{pmatrix}$

3. Tentukan determinan matriks di bawah ini:

a.  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$                       b.  $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$                       c.  $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

4. Tentukan nilai  $x$  yang memenuhi persamaan :

a.  $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4x$                       b.  $\begin{vmatrix} 6 & x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5. Selesaikan pertidaksamaan  $\begin{vmatrix} x & 27 \\ 3 & x \end{vmatrix} \leq 0$

oooo00000000000000oooo

**B. MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DENGAN KONSEP MATRIKS.**

Kompetensi Dasar : 2.6. Menggunakan determinan dan invers matriks persegi dalam penyelesaian sistem persamaan linear.

**Indikator**

- o Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan invers matriks,
- o Menjelaskan sifat-sifat matriks yang digunakan dalam menentukan penyelesaian sistem persamaan linear,
- o Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan determinan,
- o Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel.

**Pengalaman Belajar** : 2.3.1. Menggunakan invers matriks dalam menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel,  
2.3.2. Menggunakan invers matriks dalam menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier tiga variabel

Diskusikan dengan kelompok belajar anda, guna memahami beberapa hal berikut ini:

**Pengantar materi:**

Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear pada hakekatnya dapat didekati dengan konsep matriks, dan tentunya sebelum mengaplikasikan beberapa konsep matriks dalam menentnkan HP sistem persamaan linear dua/tiga variabel diharapkan siswa benar-benar memahami matriks.

**B.1. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL.**

Bentuk Umum : Sistem persamaan linear dua variabel ditulis sebagai berikut : 
$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

dengan  $a, b, c, d, p$  dan  $q \in \mathbb{R}$

Cara menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel menggunakan konsep matriks dapat diikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Nyatakan sistem persamaan linearnya dalam bentuk persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

2. Tentukan matriks koefisiennya:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

3. Menentukan invers matriks koefisiennya:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det .A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Kalikan invers matriks koefisien dengan matriks koefisiennya:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{sehingga berlaku : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

5. Menentukan nilai  $x$  dan  $y$  dari persamaan pada langkah 4.

**Masalah 11 :**

Selesaikan system persamaan 
$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

**Penyelesaian :**

$$\begin{pmatrix} 3 & \dots \\ \dots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{maka } A = \begin{pmatrix} 3 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\dots - 3} \begin{pmatrix} 2 & \dots \\ -3 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ -1 & \dots \end{pmatrix}$$

Didapat :  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ -1 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$  sehingga HP = { ....., .....

**B.2. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR TIGA VARIABEL.**

Bentuk Umum : Sistem persamaan linear dua variabel ditulis sebagai berikut :

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}, \text{ dengan } a, b, c, d, e, f, g, h, i, p, q \text{ dan } r \in \mathbb{R}$$

Agar penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel ini dapat diselesaikan menggunakan matriks maka persamaan tersebut diubah dalam persamaan matriks, sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ dapat dinyatakan dalam : } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ maka nilai } x, y \text{ dan } z$$

dapat ditentukan menggunakan aturan :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

Diskusikan hal berikut ini dengan kelompok belajar anda !

**Masalah 12 :** Selesaikan sistem persamaan  $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 4 \\ x + 4y + 2z = 4 \end{cases}$

**Penyelesaian :**

**Cara 1:**  $\det. A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.(4 - \dots) - 1.( \dots - 4) + 3.( \dots - \dots) = -24 - \dots + \dots = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -12 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots \\ 10 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ maka } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -12 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots \\ 10 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -24 + \dots - 8 \\ \dots + 4 + \dots \\ \dots (20 - \dots + \dots) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi HP = { ....., ....., -1 }

**Cara 2 :** (Dengan aturan Cramer) , telah dihitung bahwa  $\det. A = 4$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2.(4 - \dots) - 1.( \dots - 16) + 3.(16 - \dots)}{4} = \frac{-24 + \dots + \dots}{4} = \dots$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2.(8 - \dots) - 2.( \dots - 4) + 3.(12 - \dots)}{4} = \frac{-16 + \dots + \dots}{4} = \dots$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2.(8 - \dots) - 1.(12 - \dots) + 2.(12 - \dots)}{\dots} = \frac{-16 - \dots + \dots}{4} = -1.$$

$$\text{Jadi HP} = \{ \dots, \dots, -1 \}$$

**Permasalahan untuk didiskusikan siswa:**

Dengan menggunakan matriks tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan berikut ini!

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 7x - 6y = 9 \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 8 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} 10x + 5y + 3 = 0 \\ 5x + 10y + 9 = 0 \end{cases} & 5. \begin{cases} -4x + 5y - 3z = 7 \\ 2x + 2y - 5z = 6 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \\ 3. \begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ x + 5y = 39 \end{cases} & 6. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -10 \\ 3x - 5z = 27 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \end{array}$$

oooo0000000000000000oooo

# ***PENILAIAN ASPEK AFEKTIF***

## ***MENGUKUR MINAT SISWA TERHADAP MATERI BELAJAR***

Menurut anda materi belajar tentang Matriks (lingkari angka diantara pernyataan berikut):

Menyenangkan	1	2	3	4	5	Membosankan
Bermanfaat	1	2	3	4	5	Tidak Bermanfaat
Menarik	1	2	3	4	5	Tidak Menarik
Sangat perlu dipelajari	1	2	3	4	5	Tidak perlu dipelajari
Menantang	1	2	3	4	5	Tidak Menantang
Perlu disebar luaskan	1	2	3	4	5	Tidak Perlu disebar luaskan
Mempunyai korelasi dengan masalah sehari-hari	1	2	3	4	5	Tidak Mempunyai korelasi dengan masalah sehari-hari

### ***Petunjuk Penilaian:***

1. Jika rata-rata jawaban berkisar angka 1 dan 2 maka materi pembelajaran menarik minat siswa.
2. Jika rata-rata jawaban berkisar angka 4 dan 5 maka materi pembelajaran tidak menarik minat siswa, sehingga perlu adanya perubahan metode, media, strategi pembelajaran, dll.

